

POTENCIA Y FACTOR DE POTENCIA

Potencia en corriente alterna

$$v = V_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

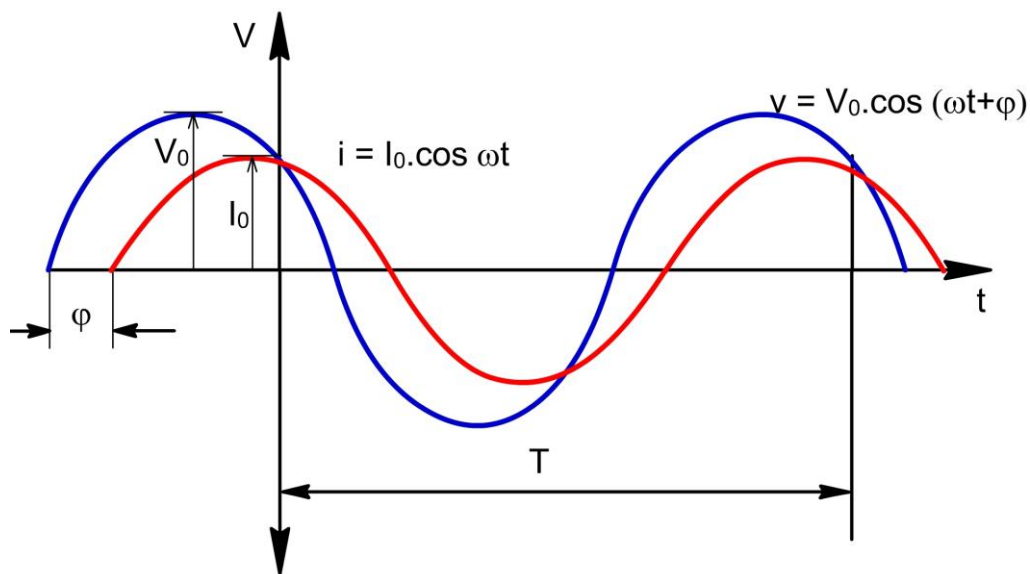
$$i = I_0 \cdot \cos(\omega t)$$

$v \cdot i = V_0 \cdot I_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot \cos(\omega t)$, aplicando la siguiente relación trigonométrica:

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)], \text{ queda: } v \cdot i = V_0 \cdot I_0 \cdot \frac{1}{2} [\cos(2\omega t + \varphi) + \cos(\varphi)]$$

La potencia promedio será:

$$\bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T v \cdot i = \frac{V_0 \cdot I_0}{T} \int_0^T \frac{1}{2} [\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi]$$



$$\bar{p} = \frac{V_0 \cdot I_0}{2 \cdot T} \left[\int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) \cdot dt + \int_0^T \cos \varphi \cdot dt \right]$$

Llamando a $2\omega t + \varphi = Z \Rightarrow dZ = 2\omega dt \therefore dt = \frac{dZ}{2\omega}$, reemplazando en la primera integral

$$\text{resulta: } \bar{p} = \frac{V_0 \cdot I_0}{2 \cdot T} \left[\int_{\varphi}^{2\omega T + \varphi} \cos Z \cdot \frac{dZ}{2\omega} + \int_0^T \cos \varphi \cdot dt \right]$$

Los límites de la primera integral serán: $\begin{cases} \text{Para } t = 0 \rightarrow Z = \varphi \\ \text{Para } t = T \rightarrow Z = 2\omega T + \varphi \end{cases}$

$$\bar{p} = \frac{V_0 \cdot I_0}{2 \cdot T} \left[(\text{sen} Z)_{\varphi}^{2\omega T + \varphi} \cdot \frac{1}{2\omega} + \cos \varphi \cdot (t)_0^T \right]$$

$$\bar{p} = \frac{V_0 \cdot I_0}{2 \cdot T} \cdot \left\{ \frac{1}{2\omega} \left[\sin \left(2 \frac{\omega}{2\pi f} T + \varphi \right) - \sin \varphi \right] + \cos \varphi \cdot T \right\}$$

$$\bar{p} = \frac{V_0 \cdot I_0}{2 \cdot T} \cdot \left\{ \frac{1}{2\omega} \left[\sin \left(\underbrace{2 \cdot 2\pi f \cdot T}_{4\pi} + \varphi \right) - \sin \varphi \right] + \cos \varphi \cdot T \right\}$$

$$\bar{p} = \frac{V_0 \cdot I_0}{2 \cdot T} \cdot \left\{ \frac{1}{2\omega} \underbrace{\left[\sin \varphi - \sin \varphi \right]}_0 + \cos \varphi \cdot T \right\}$$

$$\bar{p} = \frac{V_0 \cdot I_0}{2 \cdot T} \cdot \cos \varphi \cdot T = \frac{V_0 \cdot I_0}{2} \cdot \cos \varphi \text{ y como } V_0 = V \cdot \sqrt{2} \text{ e } I_0 = I \cdot \sqrt{2} :$$

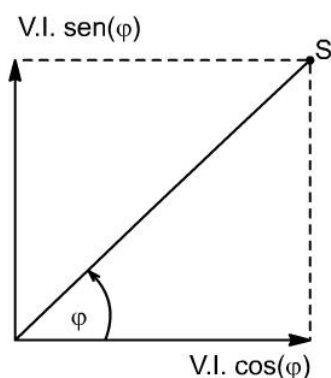
$$\bar{p} = \frac{V \cdot \sqrt{2} \cdot I \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \cos \varphi, \text{ o sea: } \bar{p} = V \cdot I \cdot \cos \varphi$$

Al $\cos \varphi$ se lo llama **Factor de Potencia** y toma valores entre uno y cero (es un ángulo del 1° ó 4° cuadrante).

Si la impedancia es reactiva pura ($\varphi = 90^\circ$ ó $\varphi = -90^\circ$), el factor de potencia es cero y la potencia promedio también será cero. Sin embargo existe una tensión y una corriente, esto quiere decir que toda la energía se almacena y se libera, alternativamente, en el campo magnético de la inductancia y en el campo eléctrico de la capacidad. La potencia puesta en juego en ese caso será: $Q = V \cdot I \cdot \sin \varphi$

La potencia útil para la carga es la potencia promedio y se la llama **Potencia Activa**, la potencia almacenada en los elementos reactivos es la **Potencia Reactiva**.

En un caso general, cuando el $\cos \varphi$ no es ni uno ni cero, existen las dos componentes, entonces, la potencia que será necesario generar para alimentar la red, es la suma vectorial de ambas y se la llama **Potencia Aparente**.



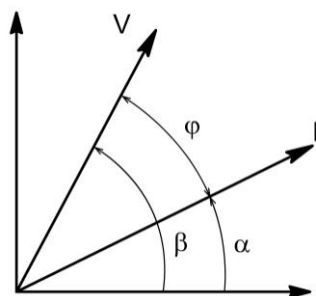
$$S = \sqrt{(V \cdot I \cdot \cos \varphi)^2 + (V \cdot I \cdot \sin \varphi)^2}$$

$$S = V \cdot I \cdot \underbrace{\sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}}_1$$

$$S = V \cdot I$$

Potencia Compleja

La potencia aparente está formada por dos componentes, una sobre el eje x y otra sobre el eje y. Podemos representar a S como un número complejo:



En el gráfico tenemos: $V = |V|^{j\beta}$ e $I = |I|^{j\alpha}$

y la potencia aparente es entonces:

$$S = V \cdot I = |V \cdot I|^{j(\beta+\alpha)}$$

El ángulo que se obtiene del producto $V \cdot I$, no es el ángulo de fase, y por lo tanto no se puede conocer directamente el factor de potencia

En cambio si se utiliza el producto: $S = V \cdot I^*$, en donde I^* es el conjugado de la corriente ($I^* = |I|^{-j\alpha}$), la potencia aparente es:

$S = V \cdot I^* = |V \cdot I|^{j(\beta-\alpha)}$. Como puede verse en el gráfico, $\beta - \alpha = \varphi$, o sea:

$$S = V \cdot I^* = |V \cdot I|^{j\varphi}. \text{ Aplicando Euler: } S = \underbrace{|V \cdot I| \cdot \cos\varphi}_P + j \cdot \underbrace{|V \cdot I| \cdot \sin\varphi}_Q; \quad S = P + jQ$$

Para determinar la potencia aparente consumida por una impedancia, se parte de la ecuación:

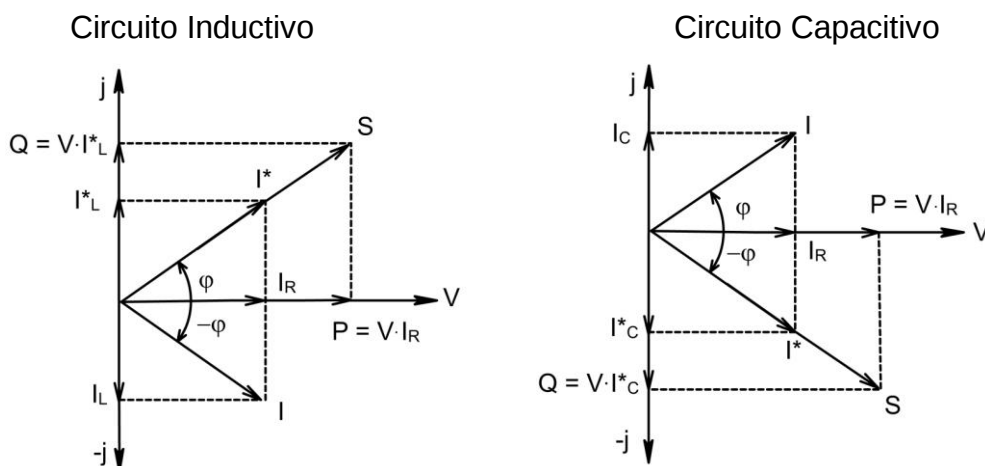
$$S = V \cdot I^*$$

Sabiendo que $I = \frac{V}{Z}$

Entonces: $I^* = \frac{V^*}{Z^*}$

Reemplazando queda: $S = \frac{V^2}{Z^*}$

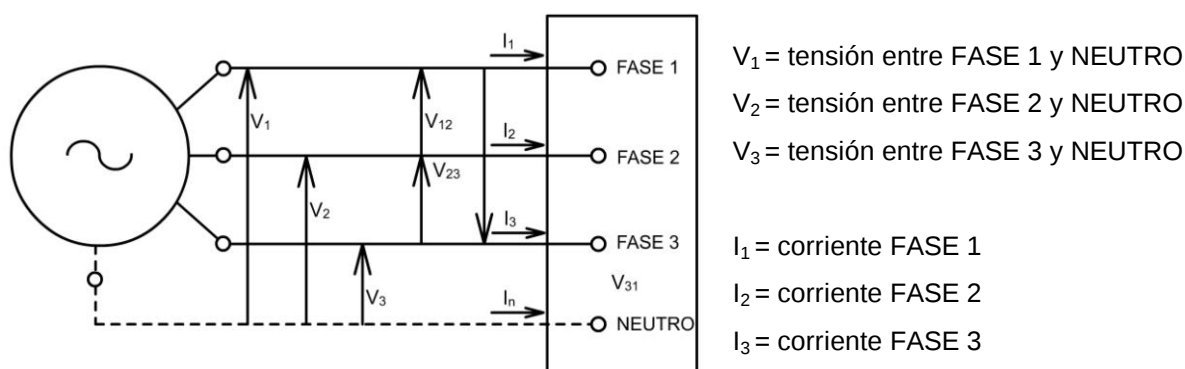
El uso del conjugado de la corriente permite además, fijar la convención de signos para la potencia reactiva. Dado que las cargas de los sistemas de potencia son mayoritariamente inductivas, es más fácil pensar que una inductancia consume potencia reactiva (+Q), mientras que un capacitor genera potencia reactiva (-Q), como ocurre en el caso de la compensación por capacitores.



Potencia Trifásica

Los sistemas de potencia se construyen para que funcionen con cargas equilibradas. En el presente curso, salvo que se aclare lo contrario, siempre se considerará que el sistema está funcionando en forma equilibrada.

En la figura, se muestra un generador trifásico entregando potencia a una carga trifásica equilibrada.



Los valores de tensión y corrientes instantáneos, serán iguales en módulo, pero desfasados 120° entre si, lo mismo ocurre con las potencias de fase.

$$\begin{cases} V_1(t) = V_0 \cdot \sin(\omega t) \\ V_2(t) = V_0 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \\ V_3(t) = V_0 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) \end{cases}
 \begin{cases} I_1(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi) \\ I_2(t) = I_0 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi - \varphi\right) \\ I_3(t) = I_0 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi - \varphi\right) \end{cases}
 \begin{cases} p_1(t) = V_1(t) \cdot I_1(t) \\ p_2(t) = V_2(t) \cdot I_2(t) \\ p_3(t) = V_3(t) \cdot I_3(t) \end{cases}$$

La potencia trifásica que entrega el generador será la suma de las tres potencias de fase.

$$p(t) = \underbrace{V_0 \cdot \sin(\omega t) \cdot I_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi)}_1 + \underbrace{V_0 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \cdot I_0 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi - \varphi\right)}_2 + \underbrace{V_0 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) \cdot I_0 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi - \varphi\right)}_3$$

De esta manera quedan determinados 3 miembros, los que se modificarán de acuerdo a la siguiente identidad trigonométrica:

$$\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]:$$

$$\frac{V_0 \cdot I_0}{2} \cdot \underbrace{[\cos(\omega t + \omega t - \varphi) - \cos(\omega t - \omega t + \varphi)]}_1 = \frac{V_0 \cdot I_0}{2} \cdot [\cos(\varphi) + \cos(2 \cdot \omega t - \varphi)] \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{V_0 \cdot I_0}{2} \cdot \left[\cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi + \omega t - \frac{2}{3}\pi - \varphi\right) - \cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi + \omega t + \frac{2}{3}\pi + \varphi\right) \right] = \\ & = \frac{V_0 \cdot I_0}{2} \cdot \underbrace{\left[\cos(\varphi) - \cos\left(2\omega t - \frac{4}{3}\pi - \varphi\right) \right]}_2 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{V_0 \cdot I_0}{2} \cdot \underbrace{\left[\cos\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi + \omega t + \frac{4}{3}\pi - \varphi\right) - \cos\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi + \omega t + \frac{4}{3}\pi + \varphi\right) \right]}_3 = \\ & = \frac{V_0 \cdot I_0}{2} \cdot \left[\cos(\varphi) - \cos\left(2\omega t - \frac{8}{3}\pi - \varphi\right) \right] \quad (3) \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación de $p(t)$ por las expresiones (1); (2) y (3), queda:

$$p(t) = \frac{1}{2} \cdot V_0 \cdot I_0 \cdot \left\{ 3 \cdot \cos(\varphi) - \left[\cos(2\omega t - \varphi) + \cos\left(2\omega t - \frac{4}{3}\pi - \varphi\right) + \cos\left(2\omega t - \frac{8}{3}\pi - \varphi\right) \right] \right\}$$

Podemos descomponer el término $\frac{8}{3}\pi$ como: $\underbrace{\frac{3}{3}\pi + \frac{3}{3}\pi}_{2\pi} + \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$, por lo tanto:

$$p(t) = \frac{1}{2} \cdot V_0 \cdot I_0 \cdot \left\{ 3 \cdot \cos(\varphi) - \underbrace{\left[\cos(2\omega t - \varphi) + \cos\left(2\omega t - \frac{2}{3}\pi - \varphi\right) + \cos\left(2\omega t - \frac{4}{3}\pi - \varphi\right) \right]}_0 \right\}$$

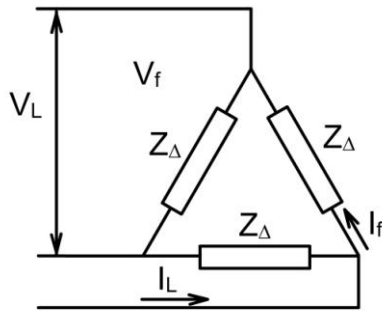
La expresión entre corchetes es la suma de una terna simétrica equilibrada, cuya resultante es nula, o sea, $p(t) = \frac{3}{2} \cdot V_0 \cdot I_0 \cdot \cos(\varphi)$, y siendo, $V_0 = V \cdot \sqrt{2}$ e $I_0 = I \cdot \sqrt{2}$.

Se concluye que la potencia trifásica de una carga equilibrada es:

$$p(t) = 3 \cdot V \cdot I \cdot \cos(\varphi)$$

En donde V e I son valores de tensión y corriente eficaces de fase.

Suponiendo una carga conectada en triángulo:



$$I_f = \frac{I_L}{\sqrt{3}} \quad V_L = V_f$$

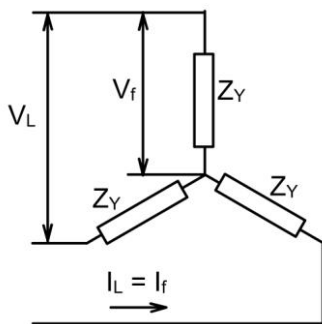
$$P_f = V_f \cdot I_f \cdot \cos\varphi$$

$$P_T = 3 \cdot V_f \cdot I_f \cdot \cos\varphi$$

$$P_T = 3 \cdot V_L \cdot \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cdot \cos\varphi$$

$$P_T = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi$$

Suponiendo una carga conectada en estrella:



$$V_f = \frac{V_L}{\sqrt{3}} \quad I_L = I_f$$

$$P_f = V_f \cdot I_f \cdot \cos\varphi$$

$$P_T = 3 \cdot V_f \cdot I_f \cdot \cos\varphi$$

$$P_T = 3 \cdot I_L \cdot \frac{V_L}{\sqrt{3}} \cdot \cos\varphi$$

$$P_T = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi$$

Tomando valores de tensión y corriente de línea, la potencia activa trifásica es independiente de la conexión de la carga.

Haciendo un análisis similar, se obtiene: $Q_T = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \sin\varphi$

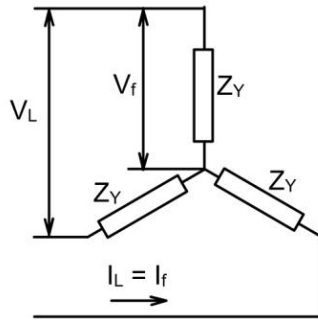
La potencia trifásica aparente es:

$$S_T = \sqrt{(\sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi)^2 + (\sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \sin\varphi)^2}$$

$$S_T = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}$$

$$S_T = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L$$

Para determinar la potencia aparente trifásica consumida por una impedancia de carga trifásica, partiendo de la conexión estrella:



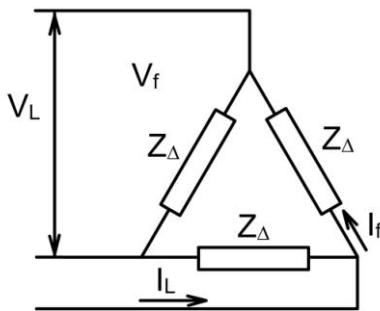
$$S_T = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L;$$

$$I_L = I_f = \frac{V_f}{Z} = \frac{V_L}{\sqrt{3} \cdot Z_Y};$$

$$S_T = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot \frac{V_L}{\sqrt{3} \cdot Z_Y};$$

$$S_T = \frac{V_L^2}{Z_Y}$$

Partiendo de la conexión triángulo:



$$S_T = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L; \quad V_f = V_L$$

$$I_f = \frac{V_f}{Z_{\Delta}}; \quad I_L = \frac{I_f}{\sqrt{3}} = \frac{V_f}{\sqrt{3} \cdot Z_{\Delta}} = \frac{\sqrt{3} \cdot V_L}{Z_{\Delta}}$$

$$S_T = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot V_L}{Z_{\Delta}};$$

$$S_T = 3 \cdot \frac{V_L^2}{Z_{\Delta}}$$

Transformando la Z_{Δ} a Z_Y , nos queda: $Z_Y = \frac{Z_{\Delta} \cdot Z_{\Delta}}{Z_{\Delta} + Z_{\Delta} + Z_{\Delta}} = \frac{Z_{\Delta}}{3}$, por lo tanto:

$S_T = 3 \cdot \frac{V_L^2}{3 \cdot Z_Y}$, o sea: $S_T = \frac{V_L^2}{Z_Y}$, que es el mismo valor que en el caso de la estrella.

Para el caso de la potencia aparente trifásica, también se aplica la convención del conjugado de la corriente, o sea que la forma correcta de expresar la última ecuación

es: $S_T = \frac{V_L^2}{Z^*}$

BIBLIOGRAFIA

1. Circuitos en Ingeniería Eléctrica - Hugh Hildreth Skilling. C.E.C.S.A.
2. Sistemas Eléctricos de Potencia - Syed A. Nasar – Mc Graw Hill.
3. Circuitos Eléctricos - Joseph A. Edminister – Mc Graw Hill.